

Egzamin z Algebry I — część teoretyczna, 03.02.2025

- Czas trwania tej części egzaminu, to 60 minut.
- W trakcie egzaminu nie można korzystać z notatek, urządzeń elektronicznych, itp.
- Odpowiedź na każde polecenie powinna być zapisana na osobnej kartce.
- Każda kartka powinna zawierać: imię i nazwisko, numer albumu i numer grupy ćwiczeniowej.

Polecenie 1.

- Podaj definicję podgrupy normalnej w grupie.
- Dowiedź, że gdy $f: G \rightarrow H$ jest morfizmem grup i N jest podgrupą normalną w H , to $f^{-1}(N)$ jest podgrupą normalną w G .

Polecenie 2.

- Podaj definicję komutanta G' grupy G .
- Wykaż, że gdy H jest podgrupą normalną grupy G oraz iloraz G/H jest grupą abelową, to H zawiera komutant G' grupy G .

Polecenie 3.

- Podaj definicję ideału głównego w pierścieniu przemiennym (z jedynką).
- Udowodnij, że każdy ideał w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest główny.

Polecenie 4.

- Dowiedź, że w pierścieniu przemiennym (z jedynką) każdy ideał maksymalny jest pierwszy.
- Podaj przykład pierścienia R oraz jego ideału pierwszego P , który nie jest ideałem maksymalnym.

Polecenie 5.

- Podaj definicję dziedziny z jednoznacznością rozkładu.
- Wykaż, że w dziedzinie z jednoznacznością rozkładu każdy element nierozkładalny jest pierwszy.

Egzamin z Algebry I — część praktyczna, 03.02.2025

- Czas trwania tej części egzaminu, to 120 minut.
- W trakcie egzaminu nie można korzystać z notatek, urządzeń elektronicznych, itp.
- Rozwiązanie każdego zadania powinno być zapisane na osobnej kartce.
- Każda kartka powinna zawierać: imię i nazwisko, numer albumu i numer grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. Niech G będzie grupą rzędu 143.

- Uzasadnij, że grupa G zawiera podgrupę normalną H rzędu 11.
- Wykaż, że dla dowolnych elementów $g \in G$ oraz $h \in H$ mamy $ghg^{-1} = h$.
- Wynioskuj, że grupa G jest abelowa.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, które z par pierścieni

$$K \times K, \quad K[x]/(x^2), \quad K[x]/(x^2 + 1)$$

są izomorficzne, gdy:

- $K = \mathbb{Q}$.
- $K = \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Niech $R = \mathbb{Z}[i]$.

- Rozłóż 2025 na czynniki pierwsze w pierścieniu R .
- Zbadaj, czy pierścień R/I jest dziedziną, gdy $I = (4 + 2i, 2 + 4i)$.

Zadanie 4. Rozstrzygnij czy ideał $I = (f)$ pierścienia wielomianów $R[x]$, generowany przez wielomian $f = 4x^{13} + 14x^2 - 28$, jest pierwszy/maksymalny, gdy:

- $R = \mathbb{Z}$.
- $R = \mathbb{Q}$.

W przypadku gdy I nie jest ideałem maksymalnym, wskaż ideał maksymalny w $R[x]$ zawierający I .

Zadanie 5. Udowodnij, że pierścień $\mathbb{Z}[i\sqrt{23}]$ nie jest dziedziną ideałów głównych.